Tillåten tävlingstid: 4 timmar och 30 minuter.
Frågor får ställas under första halvtimmen.
Endast rit- och skrivdon är tillåtna hjälpmedel.

Problem 1: Finn alla strikt ökande talföljder $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ av positiva heltal sådana att

$$3(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$$

för alla positiva heltal n.

Problem 2: Låt $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ vara positiva reella tal sådana att

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots + a_{2023}^{2023} = 2023.$$

Visa att

$$a_1^{2023} + a_2^{2022} + \cdots + a_{2022}^2 + a_{2023} > 1 + \frac{1}{2023}.$$

Problem 3: Ett ekvationssystem i variablerna x_1, x_2, x_3 sägs vara *Flensburgskt* om det finns något $i \in \{1, 2, 3\}$ sådant att, för alla reella lösningar till ekvationssystemet sådana att x_1, x_2, x_3 är parvis olika, så är $x_i > x_j$ för alla $j \neq i$.

Bestäm för vilka positiva heltal $n \geq 2$ som ekvationssystemet bestående av ekvationerna

$$a^n + b = a \text{ och } c^{n+1} + b^2 = ab$$

i de tre variablerna a, b, c är Flensburgskt.

Problem 4: Bestäm alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att

$$f(f(x) + y) + xf(y) = f(xy + y) + f(x)$$

för alla reella tal x och y.

Problem 5: Bestäm det minsta positiva reella talet α, sådant att

$$\frac{x+y}{2} \geq \alpha\sqrt{xy} + (1-\alpha)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

för alla positiva reella tal x och y.

Problem 6: Låt n vara ett positivt heltal. Varje ruta i ett $n \times n$–rutnät är färgad i en av k färger, på så vis att varje färg används minst en gång. Vi säger att två olika färger A och B är *grannar*, om det existerar en ruta med färgen A som delar en sida med en ruta med färgen B. Rutnätet är färgat på så vis att varje färg är granne med som mest 2 andra färger. Givet n, bestäm det största möjliga värdet som k kan ha?

Problem 7: En robot är på utflykt i planet. Varje meter så svänger den 90° åt höger eller åt vänster, men i övrigt rör den sig alltid rakt fram. Efter att ha utforskat planet en stund, kommer den tillbaka till där den startade, utan att ha besökt någon punkt i planet mer än en gång. Bestäm alla möjliga totala avstånd som roboten kan ha färdats under sin utflykt.

Problem 8: I Flensburg finns en oändligt lång gata, med hus numrerade 2, 3, ... Polisen i Flensburg försöker fånga en tjuv som varje natt flyttar sig från huset hon för närvarande gömmer sig i till ett av grannhusen.

För att retas med lagens långa arm så avslöjar tjuven varje morgon den största primtalsdelaren till numret på huset hon just flyttat till.

Varje söndag eftermiddag så söker polisen igenom exakt ett hus, och de fångar tjuven om de söker igenom huset hon är i vid det tillfället. Finns det en strategi som polisen kan ha, som garanterar att de fångar tjuven?

Problem 9: Finns det en triangel som kan delas upp i 101 kongruenta trianglar?

Problem 10: På en cirkel har $n \geq 3$ punkter markerats. Varje punkt är färgad antingen röd, grön eller blå. I ett drag kan vi välja två intilliggande punkter med två olika färger, sudda ut dem och sen lägga till en ny punkt med den tredje färgen mellan de utsuddade punkterna.

Om alla punkter har samma färg har vi nått en *slutposition*, och vi säger att *slutpositionens färg* är samma som punkternas färg. Finn alla n sådana att de ursprungliga n punkterna kan färgas med två av färgerna på så vis att vi, genom de ovan beskrivna dragen, kan nå en slutposition med vilken som helst av de tre färgerna.

Problem 11: Låt ABC vara en triangel och låt J vara medelpunkten i den vidskrivna cirkeln vid BC. Låt K vara reflektionen av J i linjen BC. Punkterna E och F ligger på BJ respektive CJ, och är sådana att $\angle EAB = \angle CAF = 90°$. Visa att $\angle FKE + \angle FJE = 180°$.

Anmärkning: Den vidskrivna cirkeln vid BC är cirkeln som tangerar sidan BC och förlängningarna av sidorna AB och AC.

Problem 12: Låt ABC vara en spetsvinklig triangel sådan att $AB > AC$. Låt den inre bisektrisen till vinkeln $\angle BAC$ skära BC i punkten D. Låt O vara medelpunkten i den omskrivna cirkeln till ABC. Låt AO skära segmentet BC i punkten E. Låt J vara medelpunkten i den inskrivna cirkeln till AED. Visa att om $\angle ADO = 45°$ så är $OJ = JD$

Problem 13: Låt ABC vara en spetsvinklig triangel sådan att $AB < AC$, och låt I vara medelpunkten i dess inskrivna cirkel. Låt D vara projektionen av I på linjen BC. Låt H vara höjdernas skärningspunkt i triangeln ABC. Givet att $\angle IDH = \angle CBA - \angle ACB$, visa att $AH = 2 \cdot ID$.

Problem 14: Låt ABC vara en triangel vars medianer skär varandra i G. Låt D, E och F vara medelpunkterna i de omskrivna cirklarna till trianglarna BCG, CAG respektive ABG. Låt linjen genom E som är vinkelrät mot AB skära linjen genom F som är vinkelrät mot AC i punkten X. Visa att DX skär segmentet EF i dess mittpunkt.

Problem 15: Låt ω_1 och ω_2 vara två cirklar som inte skär varandra, och sådana att ingen av dem ligger inuti den andra. Punkterna M och N väljs på cirklarna ω_1 respektive ω_2, på så vis att tangenten till ω_1 i punkten M och tangenten till ω_2 i punkten N skär varandra i P. Det visar sig också att PMN är en likbent triangel sådan att $PM = PN$. Cirklarna ω_1 och ω_2 skär segmentet MN igen i punkterna A respektive B. Linjen PA skär cirkeln ω_1 igen i punkten C och linjen PB skär cirkeln ω_2 igen i punkten D. Visa att $\angle BCN = \angle ADM$.

Problem 16: Visa att det existerar två icke-konstanta polynom f och g med heltalskoefficienter sådana att det, för oändligt många primtal p, inte finns några heltal x och y för vilka $p \mid f(x) - g(y)$.

Problem 17: Låt $S(m)$ vara siffersumman av det positiva heltalet m. Finn all par av positiva heltal (a, b) sådana att $S(a^{b+1}) = a^b$.

Problem 18: Låt $p > 7$ vara ett primtal och låt A vara en delmängd av $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ bestående av åtminstone $\frac{p-1}{2}$ element. Visa att för varje heltal r så existerar (inte nödvändigtvis olika) element $a, b, c, d \in A$ sådana att

$$ab - cd \equiv r \pmod{p}.$$

Problem 19: Visa att siffersumman av talet $2^{2^{2 \cdot 2023}}$ är större än 2023.

Problem 20: Låt n vara ett positivt heltal, och betrakta ett rutnät med $n \times n$ rutor. En *Baltisk kedja* är en mängd av n rutor med exakt en ruta från varje rad respektive kolumn.

Låt rutorna fyllas med heltalen från 1 till n^2, så att varje tal används exakt en gång. Givet ett sätt att fylla rutorna med dessa tal så definieras ett heltal som *Baltiskt* om det är en produkt av talen i rutorna i en Baltisk kedja.

(a) Låt $n = 8$. Avgör om det finns ett sätt att fylla rutorna i ett 8×8–rutnät med alla heltal från 1 till 64 sådant att differensen mellan två Baltiska tal alltid är delbar med 65.

(a) Låt $n = 10$. Avgör om det finns ett sätt att fylla rutorna i ett 10×10–rutnät med alla heltal från 1 till 100 sådant att differensen mellan två Baltiska tal alltid är delbar med 101.