November 9 to 13, 2023 | Version: Polish

Czas trwania zawodów: 4 godziny i 30 minut.
Pytania można zadawać w ciągu początkowych 30 minut.
Dopuszczalne jest posiadanie jedynie przyborów do pisania i rysowania.

Zadanie 1: Znaleźć wszystkie ściśle rosnące ciągi liczb całkowitych dodatnich $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ spełniające

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$$

dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n.

Zadanie 2: Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ spełniające

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \ldots + a_{2023}^{2023} = 2023.$$

Wykazać, że

$$a_1^{2023} + a_2^{2022} + \cdots + a_{2022}^2 + a_{2023} > 1 + \frac{1}{2023}.$$

Zadanie 3: Układ równań w zmiennych rzeczywistych x_1, x_2, x_3 nazywa się *Flensburżańskim* jeśli istnieje takie $i \in \{1, 2, 3\}$, że każde rozwiązanie tego układu równań, w którym zmienne są parami różne, spełnia nierówności $x_i > x_j$ dla wszystkich $j \neq i$.

Rozstrzygnąć, dla których liczb całkowitych dodatnich $n \geq 2$ poniższy układ dwóch równań:

$$a^n + b = a \quad \text{oraz} \quad c^{n+1} + b^2 = ab$$

w trzech zmiennych rzeczywistych a, b, c jest *Flensburżański.*

Zadanie 4: Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające

$$f(f(x) + y) + xf(y) = f(xy + y) + f(x)$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x oraz y.

Zadanie 5: Znaleźć najmniejszą dodatnią liczbę rzeczywistą α, dla której nierówność

$$\frac{x+y}{2} \geq \alpha\sqrt{xy} + (1-\alpha)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

zachodzi dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x oraz y.

Zadanie 6: Dana jest dodatnia liczba naturalna n. Każde pole tablicy $n \times n$ pokolorowano na jeden z k kolorów, przy czym każdego koloru użyto przynajmniej raz. Powiemy, że dwa różne kolory A i B *stykają się*, jeśli istnieje pole w kolorze A o wspólnym boku z polem w kolorze B. Tablica jest tak pokolorowana, że każdy kolor styka się z najwyżej 2 innymi kolorami. Jaka jest największa możliwa wartość k w zależności od n?

Zadanie 7: Robot chodzi po płaszczyźnie w następujący sposób. Przez 1 metr idzie prosto, po czym skręca o $90°$ w prawo lub lewo. Po pewnym czasie wrócił na punkt startowy i zakończył podróż. Okazało się, że nie był w żadnym miejscu więcej niż raz (poza punktem startowym, który odwiedził jedynie na początku i końcu). Jakie są możliwe długości drogi, jaką pokonał?

Zadanie 8: We Flensburgu istnieje pojedyncza, nieskończenie długa ulica z domami o numerach kolejno $2, 3, \ldots$. Lokalna policja próbuje złapać złodzieja, który każdej nocy przenosi się z domu, który obrabował za dnia do jednego z jego sąsiadów. Aby zakpić z policjantów, każdego ranka rabuś ujawnia największy dzielnik pierwszy numeru domu, który danego dnia rabuje. Każdej niedzieli, popołudniu, policja przeszukuje jeden wybrany dom i aresztuje złodzieja, jeśli będzie on w środku. Czy policja ma strategię zapewniającą złapanie złodzieja w skończonym czasie?

Zadanie 9: Rozstrzygnąć, czy istnieje trójkąt, który można rozciąć na 101 parami przystających trójkątów.

Zadanie 10: Na okręgu zaznaczono $n \geqslant 3$ punktów, a następnie każdy z nich pokolorowano na czerwono, zielono lub niebiesko. W jednym ruchu można usunąć dwa sąsiadujące punkty o różnych kolorach, a w ich miejsce (to jest pomiędzy nimi) dodać jeden punkt w trzecim kolorze. Działanie kończy się, gdy wszystkie punkty mają ten sam kolor, który nazywamy *końcowym*. Znaleźć wszystkie n, dla których istnieje początkowy układ n punktów w dwóch kolorach, dla którego każdy z trzech kolorów może być końcowym.

Zadanie 11: Dany jest trójkąt ABC oraz punkt J, środek okręgu A-dopisanego. Punkt K to odbicie J względem BC. Punkty E i F leżą odpowiednio na BJ i CJ tak, że $\angle EAB = \angle CAF = 90^\circ$. Udowodnić, że $\angle FKE + \angle FJE = 180^\circ$.

Uwaga: Okrąg A-dopisany, to okrąg styczny do boku BC i przedłużeń boków AB i AC.

Zadanie 12: W trójkącie ostrokątnym ABC zachodzi $AB > AC$. Dwusieczna $\angle BAC$ przecina BC w punkcie D. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na ABC. Prosta AO przecina bok BC w punkcie E. Niech J to środek okręgu wpisanego w AED. Udowodnić, że jeśli $\angle ADO = 45^\circ$, to $OJ = JD$.

Zadanie 13: W trójkącie ostrokątnym ABC, opisanym na okręgu o środku w I, zachodzi $AB < AC$. Niech D będzie rzutem I na bok BC, a H ortocentrum ABC. Zakładając, że $\angle IDH = \angle CBA - \angle ACB$ udowodnić, że $AH = 2 \cdot ID$.

Zadanie 14: Niech G środek ciężkości trójkąta ABC. Punkty D, E i F to środki okręgów opisanych odpowiednio na BCG, CAG i ABG. Niech X to przecięcie prostej przez E prostopadłej do AB z prostą przez F prostopadłą do AC. Udowodnić, że DX połowi odcinek EF.

Zadanie 15: Dane są okręgi ω_1 i ω_2 rozłączne zewnętrznie. Punkty M i N leżą odpowiednio na ω_1 i ω_2 tak, że styczna do ω_1 w M i styczna do ω_2 w N przecinają się w P oraz $PM = PN$. Okręgi ω_1, ω_2 przecinają ponownie odcinek MN odpowiednio w punktach A, B. Prosta PA przecina ω_1 ponownie w C, a prosta PB przecina ω_2 ponownie w D. Udowodnić, że $\angle BCN = \angle ADM$.

Zadanie 16: Udowodnić, że istnieją takie niestałe wielomiany f i g o współczynnikach całkowitych, że dla nieskończenie wielu liczb pierwszych p nie istnieją takie liczby całkowite x i y, że $p \mid f(x) - g(y)$.

Zadanie 17: Niech $S(m)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej dodatniej m. Znaleźć wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich spełniające $S(a^{b+1}) = a^b$.

Zadanie 18: Dana jest liczba pierwsza $p > 7$ oraz zbiór $A \subseteq \{0, 1, \ldots, p-1\}$ o przynajmniej $\frac{p-1}{2}$ elementach. Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej r istnieją takie (niekoniecznie różne) $a, b, c, d \in A$, że

$$ab - cd \equiv r \pmod{p}.$$

Zadanie 19: Pokazać, że suma cyfr liczby $2^{2^{2\cdot 2023}}$ jest większa niż 2023.

Zadanie 20: Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. *Bałtyckim zbiorem* nazywamy taki podzbiór n pól szachownicy $n \times n$, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się dokładnie jedno pole z tego zbioru. Dane jest przypisanie liczb od 1 do n^2 do pól szachownicy (każda liczba musi być przypisana do dokładnie jednego pola). Liczbę całkowitą dodatnią nazywamy *bałtyckim iloczynem* jeśli jest ona iloczynem liczb przypisanych do pól pewnego bałtyckiego zbioru.

(a) Niech $n = 8$. Rozstrzygnąć, czy istnieje takie przypisanie liczb od 1 do 64, że różnica każdych dwóch bałtyckich iloczynów jest podzielna przez 65.

(b) Niech $n = 10$. Rozstrzygnąć, czy istnieje takie przypisanie liczb od 1 do 100, że różnica każdych dwóch bałtyckich iloczynów jest podzielna przez 101.