Tid til rådighet: 4 timer og 30 minutter.
Spørsmål kan stilles de første 30 minuttene av konkurransen.
Kun skrive- og tegneredskaper er tillatt.

Oppgave 1: Finn alle strengt økende følger $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ av positive heltall som tilfredsstiller

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$$

for alle positive heltall n.

Oppgave 2: La $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ være positive reelle tall for hvilke

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots + a_{2023}^{2023} = 2023.$$

Vis at

$$a_1^{2023} + a_2^{2022} + \cdots + a_{2022}^2 + a_{2023} > 1 + \frac{1}{2023}.$$

Oppgave 3: Et ligningssett over de reelle tallene i variablene $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ kalles *flensburgisk* dersom det finnes en $i \in \{1, 2, 3\}$ slik at enhver løsning av ligningssettet der alle variablene er forskjellige, tilfredstiller $x_i > x_j$ for alle $j \neq i$.

Bestem alle positive heltall $n \geq 2$ for hvilke ligningssettet

$$a^n + b = a \qquad \text{og} \qquad c^{n+1} + b^2 = ab$$

i de tre reelle variablene a, b, c er flensburgisk.

Oppgave 4: Bestem alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som tilfredsstiller

$$f(f(x) + y) + xf(y) = f(xy + y) + f(x)$$

for alle reelle tall x og y.

Oppgave 5: Finn det minste positive reelle tallet α slik at

$$\frac{x+y}{2} \geq \alpha\sqrt{xy} + (1-\alpha)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

for alle positive reelle tall x og y.

Oppgave 6: La n være et positivt heltall. Hver rute i et $n \times n$ brett farges i én av k farger, og hver farge brukes minst én gang. To forskjellige farger A og B kalles naboer dersom det finnes en rute i farge A som deler en side med en rute i farge B. Brettet farges på en slik måte at enhver farge er nabo med høyst 2 andre. Hva er den største mulige verdien av k uttrykt ved n?

Oppgave 7: En robot beveger seg i planet. Etter hver tilbakelagte meter snur den seg $90°$ til høyre eller til venstre. Etter en stund vender den tilbake til startpunktet uten å ha besøkt noe annet punkt mer enn én gang, og stopper umiddelbart. Hva er de mulige lengdene på robotens rundgang?

Oppgave 8: I Flensburg by er det én eneste, uendelig lang, gate. Husene er nummererte 2, 3, … i rad. Politikonstabelen i Flensburg forsøker å fakke en tyv, som hver natt flytter seg fra huset hun akkurat befinner seg i til ett av nabohusene.

For å terge konstabelen røper tyven hver morgen den største primdivisoren til husnummeret hun akkurat har flyttet til.

Hver søndag ettermiddag ransaker konstabelen ett enkelt hus, og fakker tyven dersom hun den dagen befinner seg i akkurat det huset. Finnes det en strategi som garanterer at tyven fakkes innen endelig lang tid?

Oppgave 9: Bestem hvorvidt det finnes en trekant som kan deles opp i 101 kongruente trekanter.

Oppgave 10: Taylor markerer punkter på en sirkel. Hvert markerte punkt farger hun rødt, hvitt eller lavendel. Deretter visker hun i hvert trekk ut to markerte nabopunkter av forskjellig farge, og markerer ett nytt punkt i den tredje fargen mellom posisjonene til de to utviskede punktene. I en *sluttposisjon* har alle markerte punkter samme farge, som også kalles *sluttfargen*. Finn alle positive heltall $n \geq 3$ for hvilke det finnes en startposisjon med n markerte punkter i høyst to av fargene, hvorfra Taylor kan oppnå alle tre sluttfarger ved riktig valg av trekk.

Oppgave 11: La ABC være en trekant og J være A-utsenteret. Speilbildet til J om BC er K. Punktene E og F ligger på henholdsvis BJ og CJ slik at $\angle EAB = \angle CAF = 90°$. Vis at $\angle FKE + \angle FJE = 180°$.

Merknad: A-utsenteret er sentrum til sirkelen som tangerer linjestykket BC samt forlengelsene til strålene AC og AB bortenfor henholdsvis C og B.

Oppgave 12: La ABC være en spissvinklet trekant med $AB > AC$. Den indre vinkelhalveringslinjen til $\angle BAC$ skjærer BC i D. La O være omsenteret til ABC. La videre AO skjære linjestykket BC i E, og la J være innsenteret til AED. Vis at $\angle ADO = 45°$ medfører $OJ = JD$.

Oppgave 13: La ABC være en spissvinklet trekant med $AB < AC$ og innsenter I. La D være projeksjonen til I på BC, og H ortosenteret til ABC. Gitt $\angle IDH = \angle CBA - \angle ACB$, vis at $AH = 2 \cdot ID$.

Oppgave 14: La ABC være en trekant med tyngdepunkt G. La D, E og F være omsentrene til henholdsvis BCG, CAG og ABG. La X være skjæringspunktet mellom normalen fra E til AB og normalen fra F til AC. Vis at DX halverer linjestykket EF.

Oppgave 15: La ω_1 og ω_2 være to sirkler uten felles punkt, slik at ingen av dem ligger innenfor den andre. Punktene M og N velges på sirklene henholdsvis ω_1 og ω_2 slik at tangenten til ω_1 i M og tangenten til ω_2 i N skjæres i P, og slik at PMN er likebent med $PM = PN$. Sirklene henholdsvis ω_1 og ω_2 skjærer linjestykket MN igjen i henholdsvis A og B. Linjen PA skjærer ω_1 igjen i C, og linjen PB skjærer ω_2 igjen i D. Vis at $\angle BCN = \angle ADM$.

Oppgave 16: Vis at det finnes ikkekonstante polynomer f og g med heltallige koeffisienter slik at, for uendelig mange primtall p, finnes det ingen heltall x og y der $p \mid f(x) - g(y)$.

Oppgave 17: La $S(m)$ betegne tverrsummen til det positive heltallet m. Finn alle par (a, b) av positive heltall for hvilke $S(a^{b+1}) = a^b$.

Oppgave 18: La $p > 7$ være et primtall og la A være en delmengde av $\{0, 1, \dots, p-1\}$ bestående av minst $\frac{p-1}{2}$ elementer. Vis at for ethvert heltall r finnes det (ikke nødvendigvis forskjellige) tall $a, b, c, d \in A$ slik at

$$ab - cd \equiv r \pmod{p}.$$

Oppgave 19: Vis at tverrsummen til $2^{2^{2 \cdot 2023}}$ er større enn 2023.

Oppgave 20: La n være et positivt heltall. En *tysk* mengde i et $n \times n$ brett er en mengde av n ruter som inneholder nøyaktig én rute fra hver kolonne og hver rad. Gitt en nummerering av rutene med heltallene fra 1 til n^2 (i en nummerering brukes hvert nummer nøyaktig én gang), sies et heltall å være et *tyskt produkt* dersom det er produktet av numrene til rutene i en tysk mengde.

(a) La $n = 8$. Avgjør hvorvidt det finnes en nummerering av rutene i et 8×8 brett slik at følgende holder: differansen mellom ethvert par av tyske produkter er delelig med 65.

(b) La $n = 10$. Avgjør hvorvidt det finnes en nummerering av rutene i et 10×10 brett slik at følgende holder: differansen mellom ethvert par av tyske produkter er delelig med 101.