Laikas sprendimui: 4 val. 30 min.
Klausimus galima užduoti per pirmąsias 30 minučių.
Leidžiama naudotis tik rašymo ir braižymo priemonėmis.

Užduotis 1: Raskite visas griežtai didėjančias natūraliųjų skaičių sekas $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, kurios tenkina lygybę

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$$

su visais natūraliaisiais n.

Užduotis 2: Teigiamiems realiesiems skaičiams $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ galioja lygybė

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots + a_{2023}^{2023} = 2023.$$

Įrodykite, kad

$$a_1^{2023} + a_2^{2022} + \cdots + a_{2022}^2 + a_{2023} > 1 + \frac{1}{2023}.$$

Užduotis 3: Vadinsime lygčių sistemą su kintamaisiais $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ *flensburgietiška*, jei egzistuoja toks $i \in \{1, 2, 3\}$, kad kiekvienas lygčių sistemos sprendinys, kuriame visos kintamųjų reikšmės yra paporiui skirtingos, tenkina $x_i > x_j$ su visais $j \neq i$.

Nustatykite, kuriems natūraliesiems $n \geq 2$ dviejų lygčių sistema

$$a^n + b = a \text{ ir } c^{n+1} + b^2 = ab$$

su trimis realiaisiais kintamaisiais a, b, c yra flensburgietiška.

Užduotis 4: Nustatykite visas tokias funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad

$$f(f(x) + y) + xf(y) = f(xy + y) + f(x)$$

su visais realiaisiais x ir y.

Užduotis 5: Raskite tokį mažiausią teigiamą realųjį skaičių α, kad

$$\frac{x+y}{2} \geq \alpha\sqrt{xy} + (1-\alpha)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

su visais teigiamais realiaisiais x ir y.

Užduotis 6: Tegu n yra natūralusis skaičius. Kiekvienas $n \times n$ lentelės langelis yra nuspalvintas viena iš k spalvų, kiekviena spalva panaudota bent po kartą. Sakysime, kad dvi skirtingos spalvos A ir B liečiasi, jeigu egzistuoja langelis, kurio spalva yra A ir kuris turi bendrą kraštinę su langeliu, kurio spalva yra B. Lentelė nuspalvinta taip, kad kiekviena spalva liečiasi su daugiausiai dviem kitomis spalvomis. Kiekvienam n nustatykite didžiausią galimą k reikšmę.

Užduotis 7: Robotas juda ploštumoje tiesia linija, tačiau kaskart nuėjęs vieno metro atstumą, jis pasisuka į dešinę arba į kairę 90° kampu. Vos sugrįžęs į savo pradinį tašką, jis iš karto sustoja. Jokio kito taško robotas neaplanko daugiau kaip vieną kartą. Kokio ilgio gali būti roboto nueitas kelias? Raskite visas galimybes.

Užduotis 8: Flensburgo mieste yra be galo ilga gatvė, kurioje namai yra iš eilės sunumeruoti skaičiais $2, 3, \ldots$ Policija bando pagauti plėšikę, kuri kiekvieną naktį persikelia iš namo, kuriame tuo metu slepiasi, į vieną iš gretimų namų.

Kad paerzintų policiją, kiekvieną rytą plėšikė atskleidžia to namo, į kurį persikėlė, numerio didžiausią pirminį daliklį.

Kiekvieno sekmadienio popietę policija apieško vieną namą ir suima plėšikę, jei ji tuo metu jame slepiasi. Ar policija turi plėšikės suėmimo per baigtinį laiką strategiją?

Užduotis 9: Nustatykite, ar egzistuoja trikampis, kurį galima padalinti į 101 tarpusavyje lygų trikampį.

Užduotis 10: Apskritime pažymėta $n \geq 3$ taškų. Kiekvienas pažymėtas taškas nuspalvintas raudonai, žaliai arba mėlynai. Vieno ėjimo metu pasirenkami du gretimi skirtingų spalvų taškai, tarp jų pažymimas trečios spalvos taškas, o du pasirinktieji taškai ištrinami. Galutinėje padėtyje visi pažymėtieji taškai yra tos pačios spalvos, kurią vadiname galutine spalva. Raskite visas galimas n reikšmes, kurioms egzistuoja tokie pradiniai n taškų, nuspalvinti nepanaudojus vienos iš spalvų, kad kiekviena iš trijų spalvų galėtų tapti galutine spalva, atliekant tinkamus ėjimus.

Užduotis 11: Taškas J yra trikampio ABC pribrėžtinio apskritimo prieš viršūnę A centras. Taškas K yra simetriškas taškui J tiesės BC atžvilgiu. Taškai E ir F priklauso atitinkamai tiesėms BJ bei CJ, ir $\angle EAB = \angle CAF = 90°$. Įrodykite, kad $\angle FKE + \angle FJE = 180°$.

Pastaba. Pribrėžtinis apskritimas prieš viršūnę A liečia kraštinę BC ir kraštinių AC bei AB tęsinius.

Užduotis 12: Duotas smailusis trikampis ABC, kuriame $AB > AC$. Kampo BAC pusiaukampinė kerta tiesę BC taške D. Taškas O yra trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centras. Tiesė AO kerta atkarpą BC taške E. Taškas J yra trikampio AED įbrėžtinio apskritimo centras. Įrodykite: jei $\angle ADO = 45°$, tai $OJ = JD$.

Užduotis 13: Smailiojo trikampio ABC, kuriame $AB < AC$, įbrėžtinio apskritimo centras yra taškas I. Taškas D yra iš taško I į tiesę BC išvesto statmens pagrindas. Taškas H yra trikampio ABC aukštinių susikirtimo taškas. Duota, kad $\angle IDH = \angle CBA - \angle ACB$. Įrodykite, kad $AH = 2 \cdot ID$.

Užduotis 14: Trikampio ABC pusiaukraštinės kertasi taške G. Taškai D, E ir F atitinkamai yra trikampių BCG, CAG ir ABG apibrėžtinių apskritimų centrai. Iš taško E į tiesę AB ir iš taško F į tiesę AC išvesti statmenys kertasi taške X. Įrodykite, kad tiesė DX dalija atkarpą EF pusiau.

Užduotis 15: Apskritimai ω_1 ir ω_2 neturi bendrų taškų bei nėra vienas kito viduje. Atitinkamai pažymėti tokie apskritimų ω_1 and ω_2 taškai M ir N, kad ω_1 liestinė taške M ir ω_2 liestinė taške N kertasi taške P, o trikampis PMN yra lygiašonis, $PM = PN$. Apskritimai ω_1 ir ω_2 kerta atkarpą MN atitinkamai taškuose $A \neq M$ ir $B \neq N$. Tiesė PA kerta ω_1 taške $C \neq A$, o tiesė PB kerta ω_2 taške $D \neq B$. Įrodykite, kad $\angle BCN = \angle ADM$.

Užduotis 16: Įrodykite, kad egzistuoja daugianariai f ir g su sveikaisiais koeficientais, tenkinantys sąlygas: jie nėra konstantos; egzistuoja be galo daug pirminių skaičių p, kuriems nėra tokių sveikųjų skaičių x ir y, kad $p \mid f(x) - g(y)$.

Užduotis 17: Natūraliojo skaičiaus m skaitmenų sumą žymėsime $S(m)$. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (a, b), kurioms $S(a^{b+1}) = a^b$.

Užduotis 18: Duotas pirminis skaičius $p > 7$. Aibės $\{0, 1, \dots, p-1\}$ poaibyje A yra ne mažiau nei $\frac{p-1}{2}$ elementų. Įrodykite: kiekvienam sveikajam r egzistuoja tokie (nebūtinai skirtingi) skaičiai $a, b, c, d \in A$, kad

$$ab - cd \equiv r \pmod{p}.$$

Užduotis 19: Įrodykite, kad skaičiaus $2^{2^{2\cdot 2023}}$ skaitmenų suma yra didesnė už 2023.

Užduotis 20: Nagrinėkime $n \times n$ lentelę, kur n yra natūralusis skaičius. Jos langelių aibę vadinsime *vokiška*, jei šią aibę sudaro n langelių ir kiekvienoje eilutėje bei kiekviename stulpelyje yra po lygiai vieną šios aibės langelį. Lentelę užpildžius natūraliaisiais skaičiais nuo 1 iki n^2 (po vieną į langelį; visi skaičiai panaudojami), natūralusis skaičius vadinamas *vokiška sandauga*, jei jis lygus vokiškos aibės visų langelių skaičių sandaugai.

(a) Tegu $n = 8$. Nustatykite, ar egzistuoja 8×8 lentelės užpildymas, tenkinantis sąlygą: kiekvienų dviejų vokiškų sandaugų skirtumas dalijasi iš 65.

(b) Tegu $n = 10$. Nustatykite, ar egzistuoja 10×10 lentelės užpildymas, tenkinantis sąlygą: kiekvienų dviejų vokiškų sandaugų skirtumas dalijasi iš 101.