BALTIC WAY FLENSBURG 2023

November 9 to 13, 2023 | *Version:* Latvian

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus drīkst uzdot pirmajās 30 minūtēs.
Atļauts lietot tikai rakstāmpiederumus un zīmēšanas piederumus.

Uzdevums 1: Atrast visas augošas naturālu skaitļu virknes $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, kurām visiem naturāliem n ir spēkā

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}.$$

Uzdevums 2: Doti pozitīvi reāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$, kuriem

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots + a_{2023}^{2023} = 2023.$$

Pierādīt, ka

$$a_1^{2023} + a_2^{2022} + \cdots + a_{2022}^2 + a_{2023} > 1 + \frac{1}{2023}.$$

Uzdevums 3: Vienādojumu sistēmu ar reāliem mainīgajiem $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sauc par *Flensburdzisku*, ja eksistē tāds $i \in \{1, 2, 3\}$, ka jebkuram šīs sistēmas atrisinājumam, kuram visas trīs mainīgo vērtības ir dažādas, visiem $j \neq i$ ir spēkā $x_i > x_j$.

Atrast visus naturālus $n \geq 2$, kuriem šī divu vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} a^n + b = a \\ c^{n+1} + b^2 = ab \end{cases}$$

ar trim reāliem mainīgajiem a, b, c ir Flensburdziska.

Uzdevums 4: Atrast visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām visiem reāliem x un y ir spēkā

$$f(f(x) + y) + xf(y) = f(xy + y) + f(x).$$

Uzdevums 5: Atrast vismazāko pozitīvo reālo skaitli α, kuram visiem pozitīviem reāliem x un y ir spēkā nevienādība

$$\frac{x+y}{2} \geq \alpha\sqrt{xy} + (1-\alpha)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Uzdevums 6: Dots naturāls skaitlis n. Katra $n \times n$ tabulas rūtiņa ir izkrāsota vienā no k krāsām, pie tam katra krāsa ir izmantota vismaz vienu reizi. Divas atšķirīgas krāsas A un B saskaras, ja eksistē rūtiņa krāsā A, kurai ir kopīga mala ar rūtiņu krāsā B. Tabula ir izkrāsota tā, ka ikviena krāsa saskaras ar ne vairāk kā 2 citām krāsām. Kāda ir maksimālā iespējamā k vērtība atkarībā no n?

Uzdevums 7: Pa plakni taisnā līnijā brauc robots. Pēc katra nobrauktā metra tas maina braukšanas virzienu par $90°$ pa labi vai pa kreisi. Kādā brīdī tas sasniedz braukšanas sākumpunktu un uzreiz apstājas. Pa ceļam robots jebkurā citā plaknes punktā ir iebraucis ne vairāk kā vienu reizi. Kādas ir iespējamās robota nobrauktā ceļa garuma vērtības?

Uzdevums 8: Flensburgā atrodas bezgalīgi gara iela, kurā mājām ir secīgi numuri $2, 3, \ldots$ Flensburgas policija šajā ielā cenšas noķert zagli. Katru nakti zagle pārvietojas no mājas, kurā viņa tobrīd slēpjas, uz vienu no tās kaimiņu mājām.

Lai paķircinātu vietējās varas pārstāvjus, zagle katru rītu internetā publicē lielāko pirmreizinātāju mājas numuram, kurā viņa tobrīd atrodas.

Katras svētdienas pēcpusdienā policija pārmeklē vienu māju, un, ja tajā tobrīd atrodas zagle, viņa tiek noķerta. Vai policijai eksistē stratēģija, kā noķert zagli galīgā laikā?

Uzdevums 9: Noteikt, vai eksistē trijstūris, kuru var sagriezt 101 vienādos trijstūros.

Uzdevums 10: Uz riņķa līnijas ir atzīmēti $n \geq 3$ punkti. Katrs atzīmētais punkts ir izkrāsots sarkans, zaļš vai zils. Vienā gājienā ir atļauts izvēlēties divus atzīmētus kaimiņu punktus dažādās krāsās, izdzēst tos un pa vidu abiem izdzēstajiem punktiem atzīmēt jaunu punktu trešajā krāsā (kas atšķiras no abu izdzēsto punktu krāsām). Beigu stāvoklī visi atzīmētie punkti ir vienā krāsā, ko sauc par beigu stāvokļa krāsu. Atrast visus n, kuriem eksistē sākuma stāvoklis ar n atzīmētiem punktiem tieši divās krāsās, no kura ar atļautiem gājieniem var sasniegt kādu beigu stāvokli katrā no trijām krāsām.

Uzdevums 11: Punkts J ir centrs trijstūrim ABC pievilktajai riņķa līnijai, kas pieskaras malai BC. Punkts K ir punkta J simetriskais punkts attiecībā pret taisni BC. Punkti E un F atrodas attiecīgi uz taisnēm BJ un CJ tā, ka $\angle EAB = \angle CAF = 90°$. Pierādīt, ka $\angle FKE + \angle FJE = 180°$.

Piezīme: Par trijstūrim pievilkto riņķa līniju sauc riņķa līniju, kas pieskaras vienai tā malai un abu pārējo malu pagarinājumiem.

Uzdevums 12: Šaurleņķu trijstūrī ABC, kurā $AB > AC$, novilkta bisektrise AD. Punkts O ir trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs, taisne AO krusto malu BC punktā E. Punkts J ir trijstūrī AED ievilktās riņķa līnijas centrs. Pierādīt, ka, ja $\angle ADO = 45°$, tad $OJ = JD$.

Uzdevums 13: Šaurleņķu trijstūra ABC, kuram $AB < AC$, ievilktās riņķa līnijas centrs ir I, bet tā augstumu krustpunkts ir H. Punkts D ir no punkta I pret taisni BC vilktā perpendikula pamats. Zināms, ka $\angle IDH = \angle CBA - \angle ACB$. Pierādīt, ka $AH = 2 \cdot ID$.

Uzdevums 14: Punkts G ir trijstūra ABC mediānu krustpunkts. Punkti D, E un F ir attiecīgi trijstūriem BCG, CAG un ABG apvilkto riņķa līniju centri. Perpendikuls, kas vilkts no E pret taisni AB, krusto perpendikulu, kas vilkts no F pret taisni AC, punktā X. Pierādīt, ka taisne DX dala nogriezni EF uz pusēm.

Uzdevums 15: Riņķa līnijām ω_1 un ω_2 nav kopīgu punktu, neviena no tām arī neatrodas otras iekšpusē. Punkti M un N izvēlēti attiecīgi uz ω_1 un ω_2 tā, ka pieskare ω_1 punktā M un pieskare ω_2 punktā N krustojas punktā P un PMN ir vienādsānu trijstūris, kurā $PM = PN$. Riņķa līnijas ω_1 un ω_2 vēlreiz krusto nogriezni MN attiecīgi punktos A un B. Taisne PA vēlreiz krusto ω_1 punktā C, un taisne PB vēlreiz krusto ω_2 punktā D. Pierādīt, ka $\angle BCN = \angle ADM$.

Uzdevums 16: Pierādīt, ka eksistē tādi nekonstanti polinomi f un g ar veseliem koeficientiem, ka bezgalīgi daudziem pirmskaitļiem p jebkuriem veseliem x un y skaitlis $f(x) - g(y)$ nedalās ar p.

Uzdevums 17: Naturāla skaitļa m ciparu summu apzīmēsim ar $S(m)$. Atrast visus naturālu skaitļu pārus (a, b), kuriem $S(a^{b+1}) = a^b$.

Uzdevums 18: Dots pirmskaitlis $p > 7$. Kopa A ir kopas $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ apakškopa un satur vismaz $\frac{p-1}{2}$ elementus. Pierādīt, ka jebkuram veselam skaitlim r var atrast tādus (ne obligāti dažādus) skaitļus $a, b, c, d \in A$, ka

$$ab - cd \equiv r \pmod{p}.$$

Uzdevums 19: Pierādīt, ka skaitļa $2^{2^{2\cdot 2023}}$ ciparu summa ir lielāka par 2023.

Uzdevums 20: Dots naturāls skaitlis n. Par *vācu kopu* $n\times n$ rūtiņu laukumā sauc n rūtiņu kopu, kurā ir tieši viena rūtiņa no katras rindas un katras kolonas. Ja laukuma rūtiņās ir ierakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz n^2, katrs tieši vienā rūtiņā, tad šim laukuma aizpildījumam teiksim, ka skaitlis ir *vācisks*, ja tas ir kādas vācu kopas rūtiņās ierakstīto skaitļu reizinājums.

(a) Aplūkosim $n = 8$. Noskaidrot, vai 8×8 rūtiņu laukumā var tā ierakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 64, katru tieši vienā rūtiņā, ka šim laukuma aizpildījumam jebkuru divu vācisku skaitļu starpība dalās ar 65.

(b) Aplūkosim $n = 10$. Noskaidrot, vai 10×10 rūtiņu laukumā var tā ierakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 100, katru tieši vienā rūtiņā, ka šim laukuma aizpildījumam jebkuru divu vācisku skaitļu starpība dalās ar 101.