
Tímamörk: 4 1/2 klukkustund.
Spurningar eru leyfðar fyrstu 30 mínúturnar.
Einungis skriffæri og teikniáhöld eru leyfð.

Dæmi 1: Ákvarðið allar stranglega vaxandi runur $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ jákvæðra heiltalna sem uppfylla

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$$

fyrir allar jákvæðar heiltölur n.

Dæmi 2: Lát $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ vera jákvæðar rauntölur með

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots + a_{2023}^{2023} = 2023.$$

Sýnið að

$$a_1^{2023} + a_2^{2022} + \cdots + a_{2022}^2 + a_{2023} > 1 + \frac{1}{2023}.$$

Dæmi 3: Köllum mengi jafna í rauntölum með breytur $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ *Flensborgarlegt* ef til er $i \in \{1, 2, 3\}$ þannig að sérhver lausn jafnanna í menginu þar sem x_1, x_2, x_3 eru öll ólík uppfyllir $x_i > x_j$ fyrir öll $j \neq i$. Ákvarðið fyrir hvaða jákvæðar heiltölur $n \geq 2$, eftirfarandi mengi tveggja jafna

$$a^n + b = a \text{ og } c^{n+1} + b^2 = ab$$

í þremur raunbreytum a, b, c er Flensborgarlegt.

Dæmi 4: Ákvarðið öll föll $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sem uppfylla

$$f(f(x) + y) + xf(y) = f(xy + y) + f(x)$$

fyrir allar rauntölur x og y.

Dæmi 5: Finnið minnstu jákvæðu rauntölu α þannig að

$$\frac{x+y}{2} \geq \alpha\sqrt{xy} + (1-\alpha)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

fyrir allar jákvæðar rauntölur x og y.

Dæmi 6: Lát n vera jákvæða heiltölu. Sérhver reitur $n \times n$ skákborðs er litaður í einum af k litum þar sem hver litur er notaður að minnsta kosti einu sinni. Tveir ólíkir litir A og B eru sagðir vera *aðlægir* ef það er til reitur í lit A sem deilir hlið með reit í lit B. Litunum er raðað niður á þann hátt að hver litur sé aðlægur í mesta lagi tveimur öðrum litum. Hvert er hámarksgildi k sem fall af n?

Dæmi 7: Vélmenni ferðast beint áfram í planinu, en á eins metra fresti snýr það 90° til hægri eða vinstri. Þegar hann fer aftur í upphafspunkt stoppar hann. Ef þetta gerist og hann hefur ekki farið í neinn annann punkt oftar en einu sinni, hvaða fjarlægðir gæti vélmennið hafa farið?

Dæmi 8: Í Flensborg er ein óendanlega löng gata með húsum númeruð $2, 3, \ldots$. Lögreglan í Flensborg er að reyna ná bófa sem á hverri nóttu ferðast frá húsinu sem hún er í yfir í aðlægt hús.

Til að ergja lögreglunna tilkynnir hún á hverjum morgni stærsta frumþátt húsnúmersins hússins sem hún færði sig yfir í.

Á hverjum sunnudagseftirmiðdegi rannsakar lögreglan eitt hús og grípa bófann ef hún er í því húsi. Hefur lögreglan aðferð til að ná bófanum á endanlegum tíma?

Dæmi 9: Ákvarðið hvort til er þríhyrningur sem skipta má í 101 einslaga þríhyrninga.

Dæmi 10: Á hring eru $n \geq 3$ punktar merktir. Hver merktur punktur er rauður, grænn eða blár. Í hverju skrefi má eyða tveimur aðlægum merktum punktum af ólíkum lit og merkja nýjan punkt milli þeirra í þriðja litnum. Köllum stöðu lokastöðu ef allir punktar eru í sama lit og köllum þann lit lokalit. Finnið allar jákvæðar heiltölur n þannig að til sé upphafsstaða af n merktum punktum í aðeins tveimur litum sem getur endað með hvaða lokalit sem er eftir einhvern fjölda skrefa.

Dæmi 11: Lát ABC vera þríhyrning og J vera miðju A-umhringsins. Skilgreinum K sem speglun J um BC. Látum E vera á BJ og F á CJ þannig að $\angle EAB = \angle CAF = 90°$. Sannið að $\angle FKE + \angle FJE = 180°$.

Athugasemd: A-umhringurinn er hringurinn sem snertir hliðina BC og framlengingar hliðanna AC og AB.

Dæmi 12: Lát ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með $AB > AC$. Innri helmingalína hornsins $\angle BAC$ sker BC í D. Lát O vera ummiðju ABC. AO sker línustrikið BC í E. Skilgreinum J sem innmiðju AED. Sannið að ef $\angle ADO = 45°$ gildir $OJ = JD$.

Dæmi 13: Lát ABC vera hvasshyrndan þríhyrning með $AB < AC$, innmiðju I og hæðamiðju H. Skilgreinum D sem ofanvarp I á BC. Að því gefnu að $\angle IDH = \angle CBA - \angle ACB$, sannið $AH = 2 \cdot ID$.

Dæmi 14: Lát ABC vera þríhyrning með þyngdamiðju G. Skilgreinum D, E, F sem ummiðjur BCG, CAG og ABG, í þeirri röð. Látum X vera skurðpunkt þverilsins frá E til AB og þverilsins frá F til AC. Sannið að DX helmingi línustrikið EF.

Dæmi 15: Lát ω_1 og ω_2 vera hringi sem skerast ekki og hvorugur þeirra er inní hinum. Punktar M og N eru valdir á hringjunum ω_1 og ω_2, í þeirri röð, þannig að snertill ω_1 í M og snertill ω_2 í N skerast í P og PMN er jafnarma þríhyrningur með $PM = PN$. Hringirnir ω_1 og ω_2 skera línustrikið MN aftur í A og B, í þeirri röð. Línan PA sker hringinn ω_1 aftur í C og línan PB sker ω_2 aftur í D. Sýnið að $\angle BCN = \angle ADM$.

Dæmi 16: Sannið að til séu margliður f og g sem eru með heiltölustuðla og eru ekki fastar þannig að, fyrir óendanlega margar frumtölur p, sé ekki til neinar heiltölur x og y svo $p \mid f(x) - g(y)$.

Dæmi 17: Lát $S(m)$ vera þversummu m. Finnið öll pör (a, b) jákvæðra heiltalna þannig að $S(a^{b+1}) = a^b$.

Dæmi 18: Lát $p > 7$ vera frumtölu og A hlutmengi $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ með að minnsta kosti $\frac{p-1}{2}$ stök. Sýnið að fyrir sérhverja heiltölu r séu til (ekki nauðsynlega ólík) $a, b, c, d \in A$ þannig að

$$ab - cd \equiv r \pmod p.$$

Dæmi 19: Sýnið að þversumma $2^{2^{2 \cdot 2023}}$ sé stærri en 2023.

Dæmi 20: Lát n vera jákvæða heiltölu. *Þýskt mengi* í $n \times n$ töflu er mengi n reita sem inniheldur nákvæmlega einn reit í hverri röð og í hverjum dálk. Að merkingu reitanna með tölunum 1 til n^2 gefinni þar sem hver tala er notuð nákvæmlega einu sinni, við segjum að tala sé *þýskt margfeldi* ef það er margfeldi talnanna í reitum þýsks mengis.

(a) Lát $n = 8$. Ákvarðið hvort til sé tölusetning reitanna í 8×8 töflu þannig að eftirfarandi gildi: Mismunur sérhverra tveggja þýskra margfelda er ávallt deilanlegur með 65.

(b) Lát $n = 10$. Ákvarðið hvort til sé tölusetning reitanna í 10×10 töflu þannig að eftirfarandi gildi: Mismunur sérhverra tveggja þýskra margfelda er ávallt deilanlegur með 101.