Bearbeitungszeit: 4 Stunden und 30 Minuten.
Während der ersten 30 Minuten dürfen Fragen gestellt werden.
Einzig erlaubte Hilfsmittel sind Schreib- und Zeichengeräte.

Aufgabe 1: Bestimme alle streng monoton wachsenden Folgen $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ positiver ganzer Zahlen mit der Eigenschaft

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$$

für alle positiven ganzen Zahlen n.

Aufgabe 2: Gegeben seien positive reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ mit der Eigenschaft

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots + a_{2023}^{2023} = 2023.$$

Zeige:

$$a_1^{2023} + a_2^{2022} + \cdots + a_{2022}^2 + a_{2023} > 1 + \frac{1}{2023}.$$

Aufgabe 3: Ein Gleichungssystem für die reellen Variablen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ heißt *flensburgisch*, wenn es einen Index $i \in \{1, 2, 3\}$ gibt, für den jede Lösung des Gleichungssystems, bei der alle Variablen paarweise verschieden sind, die Ungleichung $x_i > x_j$ für alle $j \neq i$ erfüllt.

Bestimme alle positiven ganzen Zahlen $n \geq 2$, für die das Gleichungssystem

$$a^n + b = a \text{ und } c^{n+1} + b^2 = ab$$

in den drei reellen Variablen a, b, c flensburgisch ist.

Aufgabe 4: Bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$f(f(x) + y) + xf(y) = f(xy + y) + f(x)$$

für alle reellen Zahlen x und y.

Aufgabe 5: Bestimme die kleinste positive reelle Zahl α, für die die Ungleichung

$$\frac{x+y}{2} \geq \alpha\sqrt{xy} + (1-\alpha)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

für alle positiven reellen Zahlen x und y gilt.

Aufgabe 6: Sei n eine positive ganze Zahl. Jedes Feld in einer $n \times n$–Tabelle wird mit einer von k Farben eingefärbt, wobei jede Farbe mindestens einmal verwendet wird. Zwei verschiedene Farben A und B heißen *benachbart*, wenn es ein Feld der Farbe A gibt, welches eine gemeinsame Kante mit einem Feld der Farbe B hat. Die Tabelle wird derart gefärbt, dass jede Farbe zu höchstens zwei anderen Farben benachbart ist. Bestimme den maximal möglichen Wert für k in Abhängigkeit von n.

Aufgabe 7: Ein Roboter fährt in der Ebene geradeaus, aber nach jeweils einem Meter biegt er um $90°$ nach rechts oder links ab. Nach einiger Zeit erreicht er wieder den Ausgangspunkt, ohne einen anderen Punkt mehr als einmal erreicht zu haben. Dann bleibt er sofort stehen. Was sind die möglichen Gesamtlängen des Weges, die der Roboter zurückgelegt haben kann?

Aufgabe 8: In Flensburg gibt es nur eine unendlich lange Straße mit den Hausnummern $2, 3, \dots$. Die Flensburger Polizei versucht, eine Diebin zu verhaften, die in jeder Nacht von dem Haus, wo sie sich bisher versteckt hat, in ein Haus mit benachbarter Hausnummer eindringt und sich dann dort versteckt. Um die Polizei zu verspotten, gibt die Diebin jeden Morgen den größten Primfaktor der neuen Hausnummer bekannt.

Jeden Sonntagnachmittag durchsucht die Polizei ein Haus. Wenn sich die Diebin dann in diesem Haus versteckt hat, wird sie verhaftet. Gibt es für die Polizei eine Strategie, die sicher in endlicher Zeit zur Verhaftung führt?

Aufgabe 9: Entscheide, ob es ein Dreick gibt, das in 101 kongruente Dreiecke zerlegt werden kann.

Aufgabe 10: Auf einem Kreis sind $n \geq 3$ Punkte markiert, wobei jeder Punkt mit einer der Farben rot, grün oder blau gefärbt ist. In einem Schritt können zwei verschiedenfarbige benachbarte Punkte entfernt und durch einen dazwischen gelegenen Punkt der dritten Farbe ersetzt werden. Wir sagen, dass ein *Endzustand* erreicht ist, wenn alle verbliebenen Punkte die gleiche Farbe haben, und diese Farbe nennen wir die *Farbe des Endzustands*.

Bestimme alle n, für die es einen Anfangszustand mit n markierten Punkten gibt, bei dem eine Farbe fehlt und von dem aus ein Endzustand in jeder der drei Farben erreicht werden kann.

Aufgabe 11: Sei ABC ein Dreieck und J der Mittelpunkt des Ankreises gegenüber A. Sei K der Spiegelpunkt von J an der Geraden BC. Die Punkte E und F liegen derart auf den Geraden BJ bzw. CJ, dass $\angle EAB = \angle CAF = 90°$ gilt. Zeige: $\angle FKE + \angle FJE = 180°$.

Aufgabe 12: Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $|AB| > |AC|$. Die Innenwinkelhalbierende von $\angle BAC$ schneidet BC im Punkt D. Sei O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Die Gerade AO schneidet die Strecke $\overline{BC}$ in E. Sei J der Inkreismittelpunkt des Dreiecks AED. Zeige: Ist $\angle ADO = 45°$, dann gilt $|OJ| = |JD|$.

Aufgabe 13: Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $|AB| < |AC|$ und mit Inkreismittelpunkt I. Sei D der Lotfußpunkt von I auf BC. Sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Zeige: Ist $\angle IDH = \angle CBA - \angle ACB$, dann gilt $|AH| = 2 \cdot |ID|$.

Aufgabe 14: Sei ABC ein Dreieck mit Schwerpunkt G. Es seien D, E und F die Umkreismittelpunkte der Dreiecke BCG, CAG bzw. ABG. Sei X der Schnittpunkt der Senkrechten von E auf AB und von F auf AC. Zeige, dass die Gerade DX die Strecke $\overline{EF}$ halbiert.

Aufgabe 15: Seien ω_1 und ω_2 zwei Kreise ohne gemeinsame Punkte. Es liege keiner von beiden im Inneren des anderen. Zwei Punkte M und N seien so auf ω_1 bzw. ω_2 gewählt, dass sich die Tangenten an ω_1 durch M und an ω_2 durch N in einem Punkt P schneiden, für den das Dreieck PMN gleichschenklig mit $|PM| = |PN|$ ist.

Die Kreise ω_1 und ω_2 mögen die Strecke $\overline{MN}$ zusätzlich in A bzw. B schneiden. Die Gerade PA schneidet den Kreis ω_1 erneut in C und die Gerade PB schneidet den Kreis ω_2 erneut in D. Zeige: $\angle BCN = \angle ADM$.

Aufgabe 16: Zeige, dass es nichtkonstante Polynome f und g mit ganzzahligen Koeffizienten derart gibt, dass es für unendlich viele Primzahlen p keine ganzen Zahlen x und y gibt mit $p \mid f(x) - g(y)$.

Aufgabe 17: Es bezeichne $S(m)$ die Quersumme der positiven ganzen Zahl m. Bestimme alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen mit $S(a^{b+1}) = a^b$.

Aufgabe 18: Es sei $p > 7$ eine Primzahl und A eine Teilmenge von $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ mit mindestens $\frac{p-1}{2}$ Elementen. Zeige: Für jede ganze Zahl r existieren (nicht unbedingt verschiedene) Zahlen $a, b, c, d \in A$ mit der Eigenschaft

$$ab - cd \equiv r \pmod{p}.$$

Aufgabe 19: Zeige, dass die Quersumme von $2^{2^{2 \cdot 2023}}$ größer als 2023 ist.

Aufgabe 20: Sei n eine positive ganze Zahl. Unter einer *baltischen Menge* in einem $n \times n$–Quadratgitter verstehen wir eine Menge von n Feldern dieses Quadratgitters, in der aus jeder Zeile und aus jeder Spalte genau ein Feld vertreten ist. Seien die Felder des Quadratgitters mit den Zahlen von 1 bis n^2 beschriftet, wobei jede Zahl genau einmal vorkommt. Eine ganze Zahl heißt dann *baltisches Produkt*, wenn sie das Produkt der Einträge der Felder einer baltischen Menge ist.

(a) Sei $n = 8$. Entscheide, ob es eine Beschriftung eines 8×8–Gitters gibt mit folgender Eigenschaft: Die Differenz je zweier baltischer Produkte ist durch 65 teilbar.

(b) Sei $n = 10$. Entscheide, ob es eine Beschriftung eines 10×10–Gitters gibt mit folgender Eigenschaft: Die Differenz je zweier baltischer Produkte ist durch 101 teilbar.