Lahendamiseks on aega 4 1/2 tundi.
Esimese 30 minuti jooksul võib küsida küsimusi.
Ülesannete lahendamiseks on lubatud kasutada ainult kirjutus- ja joonestusvahendeid.

Ülesanne 1. Leia kõik rangelt kasvavad positiivsete täisarvude jadad $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, mis rahuldavad iga positiivse täisarvu n korral tingimust

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}.$$

Ülesanne 2. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ positiivsed reaalarvud, mis rahuldavad tingimust

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots + a_{2023}^{2023} = 2023.$$

Tõesta, et

$$a_1^{2023} + a_2^{2022} + \cdots + a_{2022}^2 + a_{2023} > 1 + \frac{1}{2023}.$$

Ülesanne 3. Nimetame tundmatuid $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sisaldavat võrrandisüsteemi *flensburglikuks*, kui leidub $i \in \{1, 2, 3\}$, nii et võrrandisüsteemi iga lahendi jaoks, kus tundmatute väärtused on paarikaupa erinevad reaalarvud, kehtib $x_i > x_j$ iga $j \neq i$ korral.

Leia kõik positiivsed täisarvud $n \geqslant 2$, mille jaoks on tundmatuid a, b, c sisaldav kahest võrrandist koosnev süsteem

$$a^n + b = a, \quad c^{n+1} + b^2 = ab$$

flensburglik.

Ülesanne 4. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad kõigi reaalarvude x ja y korral võrrandit

$$f(f(x) + y) + xf(y) = f(xy + y) + f(x).$$

Ülesanne 5. Leia vähim positiivne reaalarv α, nii et kõigi reaalarvude x, y korral kehtib

$$\frac{x + y}{2} \geqslant \alpha\sqrt{xy} + (1 - \alpha)\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

Ülesanne 6. Olgu n positiivne täisarv. Värvime $n \times n$ ruudustiku iga ruudu ühega k värvist, kasutades iga värvi vähemalt ühe korra. Ütleme, et kaks erinevat värvi A ja B puudutavad teineteist, kui leidub A värvi ruut, millel on ühine külg B värvi ruuduga. Ruudustik on värvitud selliselt, et iga värv puudutab maksimaalselt 2 teist värvi. Mis on k maksimaalne väärtus sõltuvalt arvust n?

Ülesanne 7. Robot liigub sirgjooneliselt mööda tasandit. Iga meetri läbimise järel keerab ta 90° võrra paremale või vasakule. Ühel hetkel jõuab ta tagasi alguspunkti, külastamata ühtegi teist punkti rohkem kui ühekordselt, ja peatub koheselt. Mis on roboti teekonna võimalikud pikkused?

Ülesanne 8. Flensburgi linnas on lõpmatult pikk tänav, mille majad on järjest nummerdatud arvudega $2, 3, \ldots$. Flensburgi politsei üritab tabada varast, kes kolib igal ööl majast, kus ta end parajasti peidab, ühte naabermajja.

Kohalike õiguskaitsjate pilkamiseks teatab varas igal hommikul suurima algarvu, mis jagab selle maja numbrit, kus ta asub.

Igal pühapäeva pärastlõunal otsib politsei ühe maja läbi ja tabab varga, kui ta asub läbiotsitavas majas. Kas politseil leidub strateegia, kuidas varas lõpliku aja jooksul tabada?

Ülesanne 9. Kas leidub kolmnurk, mida on võimalik lõigata 101 võrdseks kolmnurgaks?

Ülesanne 10. Ringjoonel on märgitud $n \geqslant 3$ punkti. Iga märgitud punkt on värvitud punaseks, roheliseks või siniseks. Ühel sammul tohib eemaldada kaks erinevat värvi naaberpunkti ja märkida nende endiste asukohtade vahele uus punkt, mis on kolmandat värvi. Lõppseisus on kõik märgitud punktid ühte värvi, mida nimetame lõppseisu värviks. Leia kõik n väärtused, mille korral leidub algseis n märgitud punktiga, mille värvimiseks on kasutatud täpselt kahte värvi kolmest, kuid millest alates sobivalt samme valides on võimalik jõuda kõiki kolme värvi lõppseisu.

Ülesanne 11. Olgu ABC kolmnurk ja J tema A-külgringjoone keskpunkt. Olgu K punkti J peegeldus üle sirge BC. Sirgetel BJ ja CJ valitakse vastavalt punktid E ja F, nii et $\angle EAB = \angle CAF = 90°$. Tõesta, et $\angle FKE + \angle FJE = 180°$.

Märkus: A-külgringjoon on ringjoon, mis puutub külge BC ning külgede AC ja AB pikendusi.

Ülesanne 12. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, mis rahuldab tingimust $|AB| > |AC|$. Sisenurga $\angle BAC$ poolitaja lõikub küljega BC punktis D. Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt. Sirge AO lõikub küljega BC punktis E. Olgu J kolmnurga AED nurgapoolitajate lõikepunkt. Tõesta, et kui $\angle ADO = 45°$, siis $OJ = JD$.

Ülesanne 13. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, mis rahuldab tingimust $|AB| < |AC|$, ning olgu I tema nurgapoolitajate lõikepunkt. Olgu D punktist I sirgele BC tõmmatud ristsirge aluspunkt. Olgu H kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Kehtigu $\angle IDH = \angle CBA - \angle ACB$. Tõesta, et $AH = 2 \cdot ID$.

Ülesanne 14. Olgu ABC kolmnurk ja G tema mediaanide lõikepunkt. Olgu D, E ja F vastavalt kolmnurkade BCG, CAG ja ABG ümberringjoonte keskpunktid. Olgu X punktist E sirgele AB tõmmatud ristsirge ja punktist F sirgele AC tõmmatud ristsirge lõikepunkt. Tõesta, et DX läbib lõigu EF keskpunkti.

Ülesanne 15. Olgu ω_1 ja ω_2 ringjooned, millel pole ühiseid punkte ning millest kumbki ei asu teise sees. Olgu M ja N sellised punktid vastavalt ringjoontel ω_1 ja ω_2, et ringjoonele ω_1 punktis M tõmmatud puutuja ja ringjoonele ω_2 punktis N tõmmatud puutuja lõikuvad punktis P, kusjuures $|PM| = |PN|$. Ringjooned ω_1 ja ω_2 lõikuvad lõiguga MN teist korda vastavalt punktides A ja B. Sirge PA lõikub ringjoonega ω_1 teist korda punktis C ja sirge PB lõikub ringjoonega ω_2 teist korda punktis D. Tõesta, et $\angle BCN = \angle ADM$.

Ülesanne 16. Tõesta, et leiduvad mittekonstantsed täisarvuliste kordajatega polünoomid f ja g, nii et lõpmata paljude algarvude p korral ei leidu täisarve x ja y, mis rahuldaks tingimust $p \mid f(x) - g(y)$.

Ülesanne 17. Olgu $S(m)$ positiivse täisarvu m numbrite summa. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a, b), mille korral $S(a^{b+1}) = a^b$.

Ülesanne 18. Olgu $p > 7$ algarv ja olgu A hulga $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ alamhulk, milles on vähemalt $\frac{p-1}{2}$ elementi. Tõesta, et iga täisarvu r jaoks leiduvad (mitte tingimata erinevad) $a, b, c, d \in A$, nii et

$$ab - cd \equiv r \pmod{p}.$$

Ülesanne 19. Tõesta, et arvu $2^{2^{2\cdot 2023}}$ numbrite summa on suurem kui 2023.

Ülesanne 20. Olgu n positiivne täisarv. Täidame $n \times n$ ruudustiku ruudud arvudega 1 kuni n^2, kasutades iga arvu täpselt ühe korra. Nimetame *saksa hulgaks* ruudustiku n ruudust koosnevat hulka, mis sisaldab täpselt üht ruutu ruudustiku igast reast ja veerust. Nimetame täisarvu *saksa korrutiseks*, kui ta on mingis saksa hulgas olevate arvude korrutis.

(a) Olgu $n = 8$. Kas on võimalik täita 8×8 ruudustiku ruudud nii, et iga kahe saksa korrutise vahe jagub arvuga 65?

(b) Olgu $n = 10$. Kas on võimalik täita 10×10 ruudustiku ruudud nii, et iga kahe saksa korrutise vahe jagub arvuga 101?