Tilladt tid: 4 timer og 30 minutter.
I løbet af de første 30 minutter, må der stilles spørgsmål.
Kun skrive- og tegneredskaber er tilladt.

Opgave 1: Find alle strengt voksende følger $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ af positive heltal der opfylder

$$3(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$$

for alle positive heltal n.

Opgave 2: Lad $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ være positive reelle tal der opfylder

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots + a_{2023}^{2023} = 2023.$$

Vis at

$$a_1^{2023} + a_2^{2022} + \cdots + a_{2022}^2 + a_{2023} > 1 + \frac{1}{2023}.$$

Opgave 3: Et ligningssystem i tre variable $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ kaldes *flensborgisk*, hvis der findes et $i \in \{1, 2, 3\}$ således at alle løsninger til ligningssytemmet, hvor variablene er parvist forskellige, opfylder $x_i > x_j$ for alle $j \neq i$.

Bestem for hvilke positive heltal $n \geq 2$ følgende ligningssytem

$$a^n + b = a \text{ og } c^{n+1} + b^2 = ab$$

i de tre reelle variable a, b, c er flensborgisk.

Opgave 4: Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder

$$f(f(x) + y) + xf(y) = f(xy + y) + f(x)$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 5: Find det mindste positive reelle tal α, hvor

$$\frac{x+y}{2} \geq \alpha\sqrt{xy} + (1-\alpha)\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

for alle positive reelle tal x og y.

Opgave 6: Lad n være et positiv heltal. Hvert felt på et $n \times n$ bræt farves i en af k farver, så hver farve bliver brugt mindst en gang. To forskellige farver A og B siges at røre hinanden, hvis der findes et felt med farven A, der deler en side med et felt der har farven B. Brættet er farvet således at hver farve højest rører 2 andre farver. Hvad er den maksimale værdi af k udtrykt i n?

Opgave 7: En robot bevæger sig på planet i rette linjer, men efter hver meter drejer den $90°$ til højre eller venstre. På et tidspunkt er den vendt tilbage til sit startpunkt uden at have besøgt noget andet punkt mere end en gang, hvorefter den standser. Hvad er de mulige længder af robotens tur?

Opgave 8: I Flensborg er der en uendelig lang vej med huse nummereret $2, 3, \ldots$ Politiet i Flensborg prøver på at fange en tyv, der hver nat flytter fra det hus hun befinder sig i til en af husets naboer.

For at håne lovens lange arm afslører tyven hver morgen den største primfaktor i nummeret på det hus, hun befinder sig i.

Hver søndag eftermiddag gennemsøger politiet ét hus og de fanger tyven, hvis hun befinder sig i huset de gennemsøger. Har politiet en strategi for at fange tyven på endelig tid?

Opgave 9: Afgør om der findes en trekant, som kan klippes ud i 101 kongruente trekanter.

Opgave 10: På en cirkel er $n \geq 3$ punkter markeret. Hvert markeret punkt er farvet enten rødt, grønt eller blåt. I et træk sletter man to markerede nabopunkter i forskellige farver og tilføjer et nyt markeret punkt mellem de to foregående i den tredje farve. I et slutstadie vil alle markerede punkter have samme farve. Denne farve kaldes stadiets farve. Bestem alle n hvor der findes en cirkel med n markerede punkter i maks to farver, fra hvilken man kan nå et slutstadie i hver af de tre farver med tilpas valgte træk.

Opgave 11: Lad ABC være en trekant og lad J være centrum for den ydre røringscirkel til A. Reflektionen af J i siden BC kaldes K. Punkterne E og F er henholdsvist på BJ og CJ, så $\angle EAB = \angle CAF = 90°$. Vis at $\angle FKE + \angle FJE = 180°$

Bemærkning: Den ydre røringscirkel til A er cirklen der tangerer BC udefra samt forlængelserne af AB og AC.

Opgave 12: Lad ABC være en spidsvinklet trekant med $|AB| > |AC|$. Den indre vinkelhalveringslinje til vinkel $\angle BAC$ skærer BC i D. Lad O være centrum for den omskrevne cirkel til ABC. Lad AO skære linjestykket BC i E. Lad J være centrum for den indskrevne cirkel til AED. Vis at hvis $\angle ADO = 45°$, så vil $|OJ| = |JD|$.

Opgave 13: Lad ABC være en spidsvinklet trekant med $|AB| < |AC|$ og lad I være centrum for dens indskrevne cirkel. Lad D være projektionen af I på BC. Lad H være højdernes skæringspunkt i ABC. Vis at hvis $\angle IDH = \angle CBA - \angle ACB$, så vil $|AH| = 2 \cdot |ID|$.

Opgave 14: Lad ABC være en trekant og kald medianernes skæringspunkt for G. Lad D, E og F være centrum for de omskrevne cirkler til henholdsvis trekant BCG, CAG og ABG. Lad X være skæringen mellem højden fra E til AB og højden fra F til AC. Vis at DX deler linjestykket EF på midten.

Opgave 15: Lad ω_1 og ω_2 være cirkler der hverken skærer eller indeholder hianden. Punkterne M og N er valgt på henholdsvist ω_1 og ω_2 så tangenten til ω_1 i M og tangenten til ω_2 i N skærer hinanden i punktet P så PMN er en ligebenet trekant med $|PM| = |PN|$. Cirklerne ω_1 og ω_2 skærer MN igen i henholdsvist A og B. Linjen PA skærer ω_1 igen i C og linjen PB skærer ω_2 igen i D. Vis at $\angle BCN = \angle ADM$.

Opgave 16: Vis at der eksisterer ikke-konstante polynomier f og g med heltalskoefficienter, så for uendeligt mange primtal p er der ingen heltal x og y, hvor $p \mid f(x) - g(y)$.

Opgave 17: Lad $S(m)$ betegne tværsummen af m. Find alle par (a, b) af positive heltal hvor $S(a^{b+1}) = a^b$.

Opgave 18: Lad $p > 7$ være et primtal og lad A være en delmængde af $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ med mindst $\frac{p-1}{2}$ elementer. Vis at for ethvert heltal r, findes der (ikke nødvendigvis forskellige) tal $a, b, c, d \in A$ så

$$ab - cd \equiv r \pmod{p}.$$

Opgave 19: Vis at tværsummen af $2^{2^{2 \cdot 2023}}$ er større end 2023.

Opgave 20: Lad n være et positivt heltal. En *tysk mængde* i et $n \times n$ bræt er en mængde af n felter som indeholder præcis ét felt i hver række og i hver søjle. Givet en nummerering af felterne med tallene fra 1 til n^2, som bruger hvert heltal præcis én gang, kalder vi et heltal et *tysk produkt*, hvis heltallet kan skrives som produktet af tallene på alle felterne i en tysk mængde.

(a) Lad $n = 8$. Afgør om der findes en nummerering af et 8×8 bræt så følgende betingelse er opfyldt: Forskellen mellem to tyske produkter er altid delelig med 65.

(b) Lad $n = 10$. Afgør om der findes en nummerering af et 10×10 bræt så følgende betingelse er opfyldt: Forskellen mellem to tyske produkter er altid delelig med 101.